

矩阵的概念及其线性运算的教学设计

米倩倩

(广州工商学院 通识教育学院 广州 510850)

[摘要] 本文给出矩阵的概念及其线性运算的一种教学设计, 首先介绍矩阵在计算机图像识别、考试成绩表单、春秋航空公司航线网络图以及《孙子算经》中的应用实例, 让学生了解到矩阵在现实生活中的广泛应用; 其次从历史角度讲述矩阵产生时期的中西方时代背景, 让学生从时间维度感受矩阵的产生过程, 并介绍相关数学家的学习经历和主要成就, 号召学生学习科学家的治学精神, 从而润物无声的引入思政教育; 接着给出矩阵的具体定义以及几种特殊类型的矩阵, 介绍矩阵的线性运算及其性质; 最后让学生运用矩阵作为工具解决物资运输问题, 感受矩阵在实际问题中的强大工具作用。整个过程既有趣味性又具启发性, 极大地调动学生学习的积极性和主动性。

[关键词] 矩阵; 图像识别; Matlab; 矩阵加法; 数乘运算

[中图分类号] 0156 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1647-9230 (2023)-0013-21 **[收稿日期]** 2023-08-25

一、引言

线性代数是理工、经济管理等学科大学生的一门重要的数学基础课程, 是学习后续课程的工具, 对于培养大学生的计算和抽象思维能力十分必要。近些年来, 随着科学技术突飞猛进的发展, 线性代数已经渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域, 教育工作者已经越来越深刻的感受到线性代数教学应该在充分考虑大学生的特点, 帮助大学生掌握相关的代数知识的同时, 提高其用代数的方法思考、解决实际问题的能力。线性代数主要处理与数量的线性关系相关的问题, 和其他数学课程一样, 线性代数有两类基本的数学构件: 一类是对象和数据, 另一类是这些对象之间的运算。本文讨论最简单的由数形成的矩形数表——矩阵及其线性运算。矩阵是线性代数的一个重要的基本概念和数

学工具, 它是线性代数的主要研究对象之一, 贯穿于线性代数的各个方面, 是求解线性方程组的有力工具, 也是自然科学, 工程技术和经济研究等领域处理线性模型的重要工具。矩阵广泛应用于数学建模、密码学、化学、通信和计算机科学等各个领域, 比如凯撒密码、化学反应矩阵、状态转移矩阵等, 解决了大量的科技难题, 极大地促进了科技的进步。科技进步直接改善人类生活, 进而推动人类历史发展。矩阵的线性运算包括矩阵的加减法以及实数与矩阵之间的乘法。在实数域中, 有加法、减法、乘法和除法四种基本运算, 其中减法是加法的逆运算, 除法是乘法的逆运算。在矩阵集合中, 也有加法、减法、乘法和除法运算, 其中减法是加法的逆运算, 除法是乘法的逆运算, 但不是任何两个矩阵都可以进行这四种运算。实数与矩阵之间

的数乘运算是两个不同类型的对象之间的运算，这些来自不同集合的对象之间的运算会有哪些独特的运算规则和性质？这是一个值得思考的问题。

本文主要是关于矩阵的概念及其线性运算知识点的教学设计。首先，通过矩阵在计算机图像识别、考试成绩表单、春秋航空公司航线网络图以及《孙子算经》中的应用实例，让学生了解据矩阵在自然科学、工程技术等领域的广泛应用。其次，介绍矩阵产生的中外历史背景及对矩阵理论做出重大贡献的科学家，让学生从时间维度感受矩阵这一数学成就的历史地位。与此同时，融入课堂思政，讲解数学家的学习经历和主要成就，号召学生学习科学家的不畏困难，勇于探索的科学精神，结合目前在校大学生遇到的实际问题和困难传递正能量，引导学生不断努力拼搏，克服逆境和困难。接着，给出矩阵的具体定义及几种特殊类型的矩阵，介绍矩阵的线性运算。通过与实数的运算对比，引发学生自主探索矩阵线性运算性质。最后，让

在线性代数的教学中，矩阵概念相对简单，本节介绍矩阵的几个有趣的应用实例以及矩阵产生的中外历史背景，吸引学生探索矩阵的定义。由于学生在中学阶段已经接触过矩阵的概念，所以在引例中，我们不再使用“数表”，而是直接使用“矩阵”。

引例 1 矩阵在计算机图像识别中的应用

近些年来，深度学习和神经网络广泛应用于计算机图像识别领域，其中卷积神经网络最为前沿。卷积神经网络的基本思想是使用算法对照片分类，经典的例子有对手写数字进行分类的 MNIST 数据集^[1]，将动物和交通工具进行分类的 CIFAR-10 数据集^[2]。分类操作步骤的前提是把照片存入计算机，也就是让计算机读取到照片。人类通过用眼睛观察把照片读取到人类大脑，但是计算机不同于人类，计算机只能存储数据。所以必须设计一种方法，将照片转化成数字，通过数字将图像传达给计算机，线性代数就是专门解决数字化问题的一门学科。众所周知，图像



图 1 彩色照



图 2 灰色灰度照



图 3 红色灰度照



图 4 绿色灰度照



图 5 蓝色灰度照

学生自己动手运用矩阵工具解决应用实例，践行“学以致用”的理念。

二、教学过程

（一）问题引入

是由若干像素构成的，每一个像素是一个有色方块，如果像素足够多，我们的大脑就会将其视为一个图像，而不是一组色块。

例如，图 1 中的彩色照片是 6000*4000

像素，也就是由 6000*4000 个色块组成。我们给每个色块赋予一个数字，比如图 2 的灰色调照片是 6000*4000 像素，我们用 0 到 255 共 256 个数字表示灰度，0 代表全白，255 代表全黑，数字越大代表灰度越强，那么这张照片就可以数字化为一个 6000 行 4000 列的矩阵，矩阵的每一个元素都是 0 到 255 中的一个数字，通过这个矩阵就可以把照片读取到计算机中。人眼可感知的颜色由红绿蓝三原色组合形成，所以对于彩色照片，计算机需要使用 RGB 三个矩阵来存储，其中 R 代表红色，G 代表绿色，B 代表蓝色，每种颜色的强度都是 0 到 255。图 1 的彩色照片，其实是由图 3、图 4 和图 5 合成的，因此我

们需要用三个 6000*4000 的矩阵，即矩阵的张量来表示彩色照片以便让计算机读取。这正是深层神经网络处理照片的方式。

引例 2 矩阵在考试成绩计算中的应用

每个学生从小到大都很关心自己的考试成绩，那么老师在用计算机软件处理成绩时，是把成绩单的数据表示成矩阵进行计算的。图 6 是某班级《复变函数与积分变换》课程的成绩单，把平时成绩和期末成绩表示成一个 9 行 2 列的矩阵 A，把平时成绩和期末成绩在总评成绩中所占的权重表示成 2 行 1 列的矩阵 B，把总评分数表示成 9 行 1 列的矩阵 C，那么三个矩阵之间有矩阵乘法关系 $AB = C$ 。

$$A = \begin{pmatrix} 98 & 82 \\ 100 & 91 \\ 94 & 60 \\ 90 & 41 \\ 92 & 58 \\ 94 & 69 \\ 100 & 92 \\ 92 & 38 \\ 92 & 39 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 88 \\ 95 \\ 74 \\ 61 \\ 72 \\ 79 \\ 95 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

序号	学号	姓名	平时总评 (40%)	期末测试 (60%)	总评	
					分数	等级
1	3020194101	卞明旭	98	82	88	良好
2	3020194102	陈志峰	100	91	95	优秀
3	3020194103	崔家龙	94	60	74	中
4	3020194104	窦玉荣	90	41	61	及格
5	3020194105	高光董	92	58	72	中
6	3020194106	顾小兵	94	69	79	中
7	3020194107	郭思健	100	92	95	优秀
8	3020194108	侯博知	92	38	60	及格
9	3020194109	蒋华欣	92	39	60	及格

图 6 成绩单

引例 3 矩阵在航空线路网络中的应用

假设春秋航空公司在 A、B、C、D 四城市之间开辟了若干航线，如图 8 所示，如果从 A 到 B 有航班，就用带箭头的线段连接 A、B，箭头由 A 指向 B。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}。我们把矩阵J乘以J记作J^2，则$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \circ$$

```

graph LR
    B --> A
    A --> B
    A --> C
    C --> A
    A --> D
    D --> A

```

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	0	0	0	1

C	1	0	0	1
D	1	0	1	0

表 1 四城市航班表

J^2 中的元素表示从出发城市中转一次能够抵达到达城市的航线数目，比如第一行第三列的元素 1，表示从 A 出发中转一次到达 C 的航线只有一条： $A \rightarrow D \rightarrow C$ ；第二行第四列的元素 0 表示从 B 出发中转一次到达 D 的航线是不存在的；第四行第四列的 2 表示从 D 出发中转一次到达 D 的航线有两条： $D \rightarrow A \rightarrow D$ ， $D \rightarrow C \rightarrow D$ 。同样地， J^3 中的元素表示从出发城市中转 2 次抵达到达城市的航线数目。以此类推， $J^n (n=1,2,\cdots)$ 中的元素表示从出发城市中转 $n-1$ 次抵达到达城市的航线数目。

引例 4 《孙子算经》中的鸡兔同笼问题

《孙子算经》是我国南北朝时期的一部



图 9 《孙子算经》

数学著作，里面记录了各种有趣的数学问题，

并给出了解法。《孙子算经》共三卷，其中卷下第 31 题是这样叙述的：“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何”，见图 9，这就是著名的鸡兔同笼问题，在小学四年级的数学课本上有初等方法的讲解。设鸡有 x 只，兔有 y 只，则可得二元一次方程方程组

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}, \text{ 这个方程组可}$$

以表示成矩阵的形式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 94 \end{pmatrix}$ ，用

数学软件 MATLAB 求解，如图 10 所示，可知鸡有 23 只，兔有 12 只。实际上，把多元一次方程组表示成矩阵形式然后借助 MATLAB 求解是求解方程组的非常快捷的方法。在线性代数中，著名的克莱姆法则讲的就是用矩阵作为基本工具解线性方程组的方法。克莱姆

```

命令窗口
不熟悉 MATLAB? 请参阅有关快速入门的资源。

>> A=[1 1;2 4];
>> C=[35;94];
>> X=A^(-1)*C;
>> x=X(1,1)

x =

    23

>> y=X(2,1)

y =

    12

fx >>

```

图 10 MATLAB 命令

法则具体研究了方程组的系数与方程组解的

存在性与唯一性关系，与其在计算方面的作用相比，克莱姆法则更具有重大的理论

价值。克莱姆法则是瑞士数学家克莱姆（Cramer, 1704-1752）做出的数学成果。特别是自 1727 年后，克莱姆多次旅行访学。在巴塞尔与约翰·伯努利、欧拉等人学习交流，结为挚友。后又到英国、荷兰、法国等地拜见许多数学名家，回国后在与他们的长期通信中，加强了数学家之间的联系，为数学宝库也留下大量有价值的文献。克莱姆一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重，先后当选为伦敦皇家学会、柏林研究院和法国、意大利等学会的成员。我们应该学习克莱姆的刻苦钻研和注重交流的治学精神，不畏困难，勇于探索，虚心请教，努力学习，认真工作，为社会做出自己的贡献。

早在 18 世纪，法国数学家拉格朗日（Lagrange, 1736-1813）就已经用到矩阵的概念了。矩阵的英文翻译 Matrix 这个词首先是由英国数学家西尔维斯特（Sylvester, 1814-1897）使用的^[3]。英国数学家凯莱（Clayley, 1821-1895）把矩阵作为一个独立的数学概念进行研究，并发表了一系列的论文，因此凯莱是矩阵理论的创立者。从 1736 年拉格朗日出生，到 1895 凯莱去世，这期间刚好是我国清朝的乾隆年间到清朝末年。矩阵理论就是这一时期国际上取得的数学成果。实际上，早在公元前 1 世纪，我国现存最古老的数学书籍《九章算术》中就已经用到了类似于矩阵的表示方法，这说明我国古代数学曾有着辉煌的成就。

（二）研究问题

我们具体给出矩阵的概念：

定义 1^[4] 由 $m \times n$ 个数

$a_{ij} (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$ 按一定次序排成的 m

行 n 列的表，称为一个 m 行 n 列的矩阵，简

称 $m \times n$ 矩阵，记作 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ，其

中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

一般情形下，我们用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示矩阵。为了标明矩阵的行数 m 和列数 n ，可用 $A_{m \times n}$ 表示，或记作 $(a_{ij})_{m \times n}$ ，如果 $m = n$ ，则称 $A_{m \times n}$ 为 n 阶方阵。

我们知道，所有的实数组成的集合称为实数集，实数之间有加减乘除四则运算。实数中有两个数非常特殊，一个是 0，一个是 1。任何数加上 0 不变，任何数乘以 1 不变。类似地，所有的矩阵组成一个集合，那么矩阵之间有加减乘除运算吗？矩阵中有没有类似于数 0 和数 1 的矩阵？引导学生思考后给出零矩阵和单位矩阵的定义。

定义 2 所有元素均为 0 的矩阵，称为零矩阵，记作 O 。

需要注意的是，行数与列数都不相同的两个零矩阵是不同的零矩阵。

定义 3 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素

满足条件 $a_{ij}=0, i \neq j (i, j=1 \cdots, n)$ 则称 A 为 n 阶对角阵。如果 n 阶对角阵 A 中的元素 $a_{ii}=1 (i=1, 2, \cdots, n)$ 则称 A 为 n 阶单位矩阵。

在矩阵集合中，如果一个矩阵可以跟零矩阵相加，则结果是其自身；如果一个矩阵可以跟单位矩阵相乘，则结果是其自身。也就是说零矩阵相当于数 0，单位矩阵相当于数 1，但又不是完全相同，那么有哪些区别呢？请学生讨论后，给出矩阵相等、矩阵加法和减法的定义。

定义 4 如果两个矩阵 A, B 有相同的行数与相同的列数，并且对应位置上的元素均相等，则称矩阵 A 与矩阵 B 相等，记为 $A=B$ 。

注意在实数集中，任意两个数可以比较大小，也就是说任意两个数之间有等于、大于、小于三种关系，但是在矩阵集合中，任意两个矩阵只有相等或者不相等的关系，没有大于、小于的关系。在实数集合中，任意两个数都可以做加法和减法，但是在矩阵集合中，并不是任意两个矩阵都可以做加法和减法运算的，只有满足一定条件的两个矩阵才可以做加法和减法运算。

定义 5 两个 m 行 n 列矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 对应位置的元素相加得到的 m 行 n 列矩阵，称为矩阵 A 与矩阵 B 的和，记为 $A+B$ ，即 $A+B=(a_{ij})_{m \times n}+(b_{ij})_{m \times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$ 定义矩阵减法为 $A-B=(a_{ij})_{m \times n}-(b_{ij})_{m \times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m \times n}$ 。

实数集合与矩阵集合是两个不同的集合，

但是这两个集合之间却可以定义运算，那就是数乘运算。

定义 6 以数 k 乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 的每一个元素所得到的矩阵，称为数 k 与矩阵 A 的积，记作 kA ， $kA=k(a_{ij})_{m \times n}=(ka_{ij})_{m \times n}$ 。

矩阵的加法和数乘运算统称为矩阵的线性运算。

实数中的加法运算具有交换律、结合律以及加法和乘法之间的分配律，那么矩阵加法具有交换律、结合律吗？数乘与矩阵加法之间有分配律吗？

性质 设 A, B, C, O 都是 $m \times n$ 矩阵， k, l 是数，则

$$(1) A+B=B+A$$

$$(2) (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(3) A+O=A$$

$$(4) A+(-A)=O, \text{ 其中 } -A \text{ 等于实数 } -1 \text{ 乘以矩阵 } A$$

$$(5) k(A+B)=kA+kB$$

$$(6) (k+l)A=kA+lA$$

$$(7) (kl)A=k(lA)$$

$$(8) 1 \cdot A=A$$

以上性质请学生自己课下推导证明。

(三) 应用举例

下面这个例子请学生自己动手解决。

例 有某种物资（单位：吨）从 3 个产地运往 4 个销地，产地与销地之间的里程（单位：公里）为矩阵 A ，两次调运方案分别为

矩阵 B 与矩阵 C ，已知每吨货物每公里的运费为 1.5 元，则各产地与各销地之间每吨货物的运费为多少？从各产地运往各销地两次的物资调运量一共多少吨？

$$A = \begin{pmatrix} 120 & 175 & 80 & 90 \\ 80 & 130 & 40 & 50 \\ 135 & 190 & 95 & 105 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

。

解 各产地与各销地之间每吨货物的运费可以记为矩阵：

$$1.5A = 1.5 \begin{pmatrix} 120 & 175 & 80 & 90 \\ 80 & 130 & 40 & 50 \\ 135 & 190 & 95 & 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \times 120 & 1.5 \times 175 & 1.5 \times 80 & 1.5 \times 90 \\ 1.5 \times 80 & 1.5 \times 130 & 1.5 \times 40 & 1.5 \times 50 \\ 1.5 \times 135 & 1.5 \times 190 & 1.5 \times 95 & 1.5 \times 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 & 262.5 & 120 & 135 \\ 120 & 195 & 60 & 75 \\ 202.5 & 285 & 142.5 & 157.5 \end{pmatrix}$$

从各产地运往各销地两次的物资调运量共有：

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+3 & 7+2 & 2+0 \\ 2+2 & 0+1 & 4+5 & 3+7 \\ 0+0 & 1+6 & 2+4 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & 2 \\ 4 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 7 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

从以上例子可以看出，把现实生活中的物资运输类问题转化成矩阵，然后用矩阵理论分析解决，简单快捷。

参考文献：

[1] 卜文锐. 基于 MNIST 数据集的参数最优化算法比较研究[J]. 电子技术与软件工程, 2021 (11): 187-188.

[2] 韩凌锋. 基于 FPGA 的 Cifar-10 图像识别

(四) 内容小结

本次课程主要讲解的知识点是矩阵的概念及其线性运算。首先通过四个有趣的例子引入矩阵的概念，讲解矩阵产生的历史背景，并穿插课堂思政教学；然后，采用问题启发式和问题探究式教学，通过设问引发学生思考探究矩阵的定义、加减法、数乘运算及运算性质；最后，给出矩阵在物资运输问题中的实际应用，让学生体会矩阵的用处。

三、小结

数学课程相对枯燥，加上矩阵的概念及其线性运算一节相对简单，因此需要从实际应用角度挖掘案例增强知识的趣味性，寓教于乐，引导学生主动探索学习，让学生感受到矩阵在现实生活中的应用。在课堂教学过程中穿插讲述矩阵产生的历史背景以及中外数学家的故事，对学生进行思想教育，达到知识讲解与课程思政无缝衔接的效果，真正做到教书育人。

作者简介：米倩倩，女，1985 年出生，河北邯郸人，就职于广州工商学院通识教育学院，讲师，博士学位，研究方向为代数 Coxeter 群及其表示理论。 科研项目：校级课题 KYB202335

系统研究[D]. 江西理工大学, 2022.

[3] 张小向，陈建龙. 线性代数学习指导[M]. 科学出版社，2008.

[4] 赵树嫖. 线性代数（第六版）[M]. 中国人民大学出版社，2021.

The concept of matrix and its teaching design of linear operation

Mi Qian qian

(Guangzhou School of General Education, Institute of Technology and Technology Guangzhou
510850)

Abstract: This paper presents the concept of matrix and its linear operation, First of all, the application of matrix in computer image recognition, exam result form, Spring Airlines route network diagram and "Sun Zi calculation", Let the students understand the wide application of matrix in real life; Secondly, from the historical perspective, the background of the matrix generation period in the Chinese and Western era, Let the students feel the production process of the matrix from the time dimension, And introduce the learning experience and main achievements of relevant mathematicians, Call on students to learn the academic spirit of scientists, Thus moisten the silent introduction of ideological and political education; Then give a specific definition of the matrix as well as several special types of matrices, Introduce the linear operation of the matrix and its properties; Finally, let the students use the matrix as a tool to solve the problem of material transportation, The powerful instrumental role of the perception matrix in practical problems. The whole process is both interesting and enlightening, which greatly arouses the enthusiasm and initiative of students in learning.

Key words: matrix; image recognition; Matlab; matrix addition; number multiplication operation